INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ETUDES ECONOMIQUES

ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE

CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ELEVES TITULAIRES STATISTICIENS ECONOMISTES

OPTION MATHEMATIQUES (M')

JUIN 1994

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Il est demandé au candidat de souligner dans chacune de ses réponses le ou les points clés.

La clarté, la concision et la présentation seront des éléments importants d'appréciation.

Soit A une matrice rectangulaire à éléments réels, on dit que A est positive (resp. strictement positive) et on note $A \geq 0$ (resp. $A > 0$) lorsque tous les éléments de A sont positifs (resp. strictement positifs).

De même, si B est une matrice rectangulaire à éléments réels de même dimension que A, on écrit $A \leq B$ pour $B - A \geq 0$ et $A < B$ pour $B - A > 0$.

Si C est une matrice rectangulaire à éléments complexes $C = (c_{i,j})_{i,j}$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, on note C^+ la matrice d'éléments $(|c_{i,j}|)_{i,j}$.

On note Id_n la matrice identité d'ordre n.

Si A est une matrice carrée réelle ou complexe d'ordre n, on note $detA$ le déterminant de A et χ_A le polynôme caractéristique de A dont on rappelle qu'il est défini par

$$\chi_A(\lambda) = det(\lambda Id_n - A).$$

On appelle valeur propre de A toute racine (réelle ou complexe) de χ_A. On appelle vecteur propre de A toute matrice colonne X (réelle ou complexe) de dimension n telle que $AX = \lambda X$, où λ est une valeur propre de A.

Si A est réelle, on note $\mathcal{A}$ l'application linéaire de matrice A dans un espace vectoriel réel de dimension n et de base $(e_1, \ldots, e_n)$.

Si $A = (a_{i,j})_{i,j}$, $i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, n$ et si q est un entier naturel, on note $(a_{i,j}^{(q)})_{i,j}$ les éléments de A^q.

A est dite réductible si il existe une partition de $\{1, \ldots, n\}$ formée de deux éléments non vides I et J telle que pour tout couple (i,j) dans $I \times J$ on a $a_{i,j} = 0$. Dans tous les autres cas la matrice est dite irréductible.

Soit σ une permutation de $\{1, \ldots, n\}$, on appelle permutation de A (associée à σ) la matrice A_σ d'éléments $(a_{\sigma(i),\sigma(j)})_{i,j}$.

I. Résultats généraux

1) Montrer que A est réductible si et seulement si il existe une permutation A_σ de A de la forme

$$A_\sigma = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

où B et D sont des matrices carrées.

2) Montrer que A est réductible si et seulement si il existe un sous ensemble propre I de $\{1, \ldots, n\}$ tel que le sous-espace engendré par la famille $(e_i)_{i \in I}$ soit stable par $\mathcal{A}$.

3) Soit A une matrice irréductible positive d'ordre n et soit y un vecteur colonne à n coordonnées réelles positives ($y \geq 0$). Montrer que si $y \neq 0$ et si y possède des coordonnées nulles alors $(Id_n + A)y$ possède un nombre de coordonnées nulles strictement inférieur à celui de y.

4) En déduire que si A est une matrice carrée positive irréductible d'ordre n alors la matrice $(Id_n + A)^{n-1}$ est strictement positive.

5) Soit A matrice carrée positive irréductible d'ordre n et P un polynôme non nul de degré m tel que $P(A) = 0$.

a) Montrer qu'il existe un polynôme R de degré $r \leq m - 1$ tel que $R(A) > 0$.

b) En déduire que pour tout couple (i,j) d'éléments de $\{1, \ldots, n\}$ vérifiant $i \neq j$, il existe un entier q tel que $q \leq m - 1$ et $a_{i,j}^{(q)} > 0$.

c) Montrer que pour tout i dans $\{1, \ldots, n\}$, il existe un entier q tel que $0 < q \leq m$ et $a_{i,i}^{(q)} > 0$.

d) Déduire de ce qui précède que $(Id_n + A)^{m-1} > 0$.

II. Valeurs propres des matrices positives irréductibles

Dans tout ce qui suit A désigne une matrice positive irréductible d'ordre n et χ_A son polynôme caractéristique. Soit x un vecteur colonne réel positif non nul de dimension n, on pose $r(x) = \inf_{i\in I} \frac{(Ax)_i}{x_i}$ où $I = \{i \in \{1,\dots,n\} : x_i \neq 0\}$.

On pose $M = \{x \in R^n : x \geq 0$ et $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$ et $N = \{(I+A)^{n-1}x, x \in M\}$.

1) Montrer que $\sup_{x\geq 0} r(x) = \sup_{x\in M} r(x) = \sup_{x\in N} r(x)$.

2) Montrer que r est continue sur N et qu'elle atteint sa plus grande valeur ρ pour un certain vecteur strictement positif. En déduire que $\rho > 0$.

3) On appelle vecteur extrémal tout vecteur positif et non nul z tel que $\rho z \leq Az$. Montrer que tout vecteur extrémal est strictement positif et est vecteur propre de A (on précisera la valeur propre associée).

4) Soit α une racine de χ_A. Montrer que $|\alpha| \leq \rho$.

5) Soit y un vecteur propre réel, non nul, associé à ρ, montrer que y^+ est un vecteur extrémal et en déduire que l'espace propre associé à ρ est de dimension 1.

6) On note $B(\lambda)$ la matrice des co-facteurs de $A(\lambda) = \lambda Id_n - A$ et on note $B_{i,j}(\lambda)$ ses éléments. Montrer que $B(\rho)$ est de rang 1.

7) Montrer que dans toute colonne non nulle de $B(\rho)$, tous les éléments sont non nuls et de même signe. Montrer qu'il en est de même pour la matrice transposée de $B(\rho)$ et en déduire que tous les éléments de $B(\rho)$ sont non nuls et de même signe.

8) Montrer que ρ est une racine simple de χ_A (on pourra montrer que tout vecteur propre de A associé à ρ est vecteur propre de la matrice transposée de $B(\rho)$ associé à $\frac{d\chi_A}{d\lambda}(\rho)$).

III. "Réduction" des matrices positives irréductibles

Dans tout ce qui suit A désigne une matrice positive irréductible d'ordre n et ρ sa plus grande valeur propre réelle.

1) Soit C une matrice carrée complexe d'ordre n telle que $C^+ \leq A$ et soit γ une valeur propre de C.

a) Montrer que $|\gamma| \leq \rho$.

b) On suppose, jusqu'à la fin du problème, que $|\gamma| = \rho$ et on note y un vecteur propre (non nul) de C associé à γ. Montrer que $C^+y^+ = Ay^+$ et en déduire que $C^+ = A$.

c) Montrer qu'il existe des réels $(\psi_1,\dots,\psi_n)$ tels que $y = Dy^+$, où D est la matrice diagonale d'éléments diagonaux $(e^{i\psi_1},\dots,e^{i\psi_n})$. Soit ϕ réel tel que $\gamma = \rho e^{i\phi}$. Montrer que $C = e^{i\phi}DAD^{-1}$.

d) Supposons que A possède exactement h valeurs propres (chacune d'entre elles pouvant être d'ordre de multiplicité supérieur à 1) de module ρ, notées $\lambda_0 = \rho e^{i\phi_0},\dots,\lambda_{h-1} = \rho e^{i\phi_{h-1}}$ avec $0 = \phi_0 < \dots < \phi_{h-1} < 2\pi$. Montrer que pour $k = 0,\dots,h-1$, il existe une matrice diagonale D_k avec $D_k^+ = Id_n$ telle que $A = e^{i\phi_k}D_kAD_k^{-1}$.

2) Montrer que chacune des valeurs propres $\lambda_1,\dots,\lambda_{h-1}$ est racine simple de χ_A et que

les matrices D_k sont alors définies de façon unique à un coefficient multiplicatif près (pour $z > 0$ vecteur propre de A associé à la valeur propre ρ, on pourra considérer le vecteur $D_k z$).

Dans la suite on normalise les matrices D_k en posant que leur premier élément diagonal est égal à 1.

3) Montrer que pour tout couple (j, k) d'éléments de $0, \ldots, h-1$ on a

$$A = e^{i(\phi_j - \phi_k)} D_j D_k^{-1} A D_k D_j^{-1}$$

$$\text{et } A = e^{i(\phi_j + \phi_k)} D_j D_k A D_k^{-1} D_j^{-1}.$$

4) En déduire que les nombres $e^{i\phi_0}, \ldots, e^{i\phi_{h-1}}$ et les matrices diagonales $D_0, \ldots, D_{h-1}$ forment deux groupes abéliens multiplicatifs isomorphes.

5) Montrer que $\phi_k = \frac{2k\pi}{h}$ et $D_k = D_1^k$, $k = 0, \ldots, h-1$.

6) Montrer que D_1 admet une permutation sous la forme suivante

$$\begin{pmatrix} \beta_1 Id_{n_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \beta_s Id_{n_s} \end{pmatrix}$$

où $\beta_1, \ldots, \beta_s$ sont des racines $h^{\text{ème}}$ de l'unité rangées par argument (dans $[0, 2\pi[$) croissant et où $n_1, \ldots, n_s$ sont des entiers naturels de somme égale à n.

7) Montrer que A admet une permutation sous la forme suivante

$$\begin{pmatrix} 0 & A_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & A_{s-1} \\ A_s & 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

où $A_1, \ldots, A_s$ sont des matrices carrées de dimensions respectives $n_1, \ldots, n_s$.